$\frac{\ln 3}{3^2}+\frac{\ln 4}{4^2}+.....+\frac{\ln(n)}{n^2}=S_n-\frac{\ln 2}{2^2}$ .Le second membre s'écrit :

$\int_2^3\frac{\ln(x)}{x^2}dx+\int_3^4\frac{\ln(x)}{x^2}dx+....+\int_{n-1}^n\frac{\ln(x)}{x^2}dx=\int_2^n\frac{\ln(x)}{x^2}dx$ La troisième somme s'écrit :

$\frac{\ln 2}{2^2}+\frac{\ln 3}{3^2}+.....+\frac{\ln(n-1)}{(n-1)^2}=S_n-\frac{\ln(n)}{n^2}$ d'où on a bien l'encadrement : $S_n-\frac{\ln 2}{2^2}\le\int_2^n\frac{\ln(x)}{x^2}dx\le S_n-\frac{\ln(n)}{n^2}$

b) La première inégalité s'écrit : $S_n\le\frac{\ln 2}{2^2}+\left[-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right]_2^n$ d'après 2.b) soit : $S_n\le\frac{\ln 2}{2^2}-\frac{\ln(n)}{n}-\frac{1}{n}+\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{2}$ ou encore :

$S_n\le\frac{2+3\ln 2}{4}-\frac{1+\ln(n)}{n}$. La deuxième inégalité s'écrit : $S_n\ge\frac{\ln(n)}{n^2}+\left[-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right]_2^n$ soit :

$S_n\ge\frac{\ln(n)}{n^2}-\frac{\ln(n)}{n}-\frac{1}{n}+\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{2}$ ou encore : $S_n\ge\frac{1+\ln 2}{2}-\frac{n+n\ln(n)-\ln(n)}{n^2}$ d'où on trouve l'encadrement demandé.

c) on a : $\frac{1+\ln 2}{2}-\frac{100+99\ln(100)}{100^2}\le S_{100}\le\frac{2+3\ln 2}{4}-\frac{1+\ln(100)}{100}$ on obtient avec la calculatrice : $0,79\le S_{100}\le 0,97$.

Exercice N°16: 1.a) $I_1=\frac{1}{1!}\int_1^2\frac{(\ln x)}{x^2}dx=\int_1^2\frac{\ln x}{x^2}dx$ soit $\begin{bmatrix}u(x)=\ln x\Rightarrow u'(x)=\frac{1}{x}\\ v'(x)=\frac{1}{x^2}\Leftarrow v(x)=-\frac{1}{x}\end{bmatrix}$

$\Rightarrow I_1=\left[-\frac{1}{x}.\ln(x)\right]_1^2-\int_1^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx=-\frac{\ln 2}{2}-\left[\frac{1}{x}\right]_1^2=-\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{2}$.

b) $I_{n+1}-I_n=\frac{1}{(n+1)!}\int_1^2\frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2}dx-\frac{1}{n!}\int_1^2\frac{(\ln x)^n}{x^2}dx=\frac{1}{n!}\left[\int_1^2\frac{(\ln x)^n}{x^2}\left(\frac{\ln x}{n+1}-1\right)dx\right]$ or on a :

$x\in[1;2]\Rightarrow\ln x\ge 0$ *et* $x>0$ *donc* $\frac{(\ln x)^n}{x^2}\ge 0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, d'autre part: $x\le 2<e\Rightarrow\ln x<\ln e=1$ et comme

$\frac{1}{n+1}<1\ \forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\frac{\ln x}{n+1}<1\Rightarrow\frac{\ln x}{n+1}-1<0$ donc $\frac{(\ln x)^n}{x^2}\left(\frac{\ln x}{n+1}-1\right)<0$ *et par suite* $I_{n+1}-I_n\le 0$ alors (I_n) est une suite décroissante. On a $\forall x\in[1;2],\forall n\in\mathbb{N}^*:\frac{(\ln x)^n}{x^2}\ge 0\ \Rightarrow\frac{1}{n!}\int_1^2\frac{(\ln x)^n}{x^2}dx\ge 0\Rightarrow(I_n)$ est une suite décroissante et minorée par 0 donc (I_n) est une suite convergente.

c) On a : $\forall x\in[1;2]\Rightarrow 0\le\ln x\le\ln 2$ *car* $\ln\nearrow\Rightarrow 0\le(\ln x)^n\le(\ln 2)^n\Rightarrow 0\le\frac{(\ln x)^n}{x^2}\le\frac{(\ln 2)^n}{x^2}$

$\Rightarrow 0\le\int_1^2\frac{(\ln x)^n}{x^2}dx\le\int_1^2\frac{(\ln 2)^n}{x^2}dx$ or : $\int_1^2\frac{(\ln 2)^n}{x^2}dx=(\ln 2)^n\int_1^2\frac{1}{x^2}dx=(\ln 2)^n\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2=\frac{(\ln 2)^n}{2}$ donc

$\Rightarrow 0\le\int_1^2\frac{(\ln x)^n}{x^2}dx\le\frac{(\ln 2)^n}{2}\le(\ln 2)^n\Rightarrow 0\le\frac{1}{n!}\int_1^2\frac{(\ln x)^n}{x^2}dx\le\frac{(\ln 2)^n}{n!}$ d'où $I_n\le\frac{(\ln 2)^n}{n!}$. Et

comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(\ln 2)^n}{n!}\le\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln 2)^n=0$ car $(\ln 2)^n$ est une suite géométrique de raison : 0 <ln(2) <1 donc $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.

Qarray.tn - Agra Blech- Qarray.tn

Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...